МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича**

**Кафедра высшей математики и исследования операций**

Курсовая работа   
на тему:

«Программная реализация метода Лагранжа для построения оптимального портфеля в случае одношаговой модели (B,S)-рынка»

Выполнила: студентка 3 курса 4 группы

Плаутина Марина

Научный руководитель :

Данилова Наталья Викторовна

Ростов-на-Дону

2016

**Оглавление**

* Введение
* Основные понятия и термины
* Постановка задачи
* Описание модели и алгоритм решения задачи
* Полученные результаты
* Заключение
* Список литературы

**Введение**

Управляя капиталом, мы сталкиваемся с множеством сложных проблем при формировании и оценке портфеля - от прогнозирования динамики рынка в целом и отдельных активов, до прогноза макроэкономических показателей и оценки их влияния на поведение отдельных активов и портфелей. Сложность задачи формирования инвестиционного портфеля заключается в стремлении максимизировать ожидаемую доходность инвестиций при определенном, приемлемом для организации уровне риска.

При этом возникает множество вопросов:

• Чему уделить основное внимание: риску всего портфеля или отдельных активов, входящих в него?

• Как количественно измерить риск портфеля?

• Можно ли снизить риск портфеля, изменяя веса активов в нем?

• Если да, то, как добиться снижения риска, обеспечив доходность портфеля, сравнимую с доходностью составляющих его активов?

Рассмотрим решение этих вопросов на примере одношаговой модели рынка.

**Основные понятия и термины**

(B,S)-рынок – математическая модель финансового рынка, состоящего из безрискового банковского счета и вектора акций различных типов (буква соответствует слову bonds — боны, облигации, а буква является начальной буквой слова stocks — акции). То есть, объект, состоящий из последовательности строго положительных чисел **, интерпретируемых как цены банковского счёта в моменты времени ** (цены безрисковых активов), и последовательностей строго положительных случайных величин **, **, на конечном вероятностном пространстве ** , интерпретируемых как цены акций ( k-го типа) в моменты времени ** (цены рисковых активов).

Портфель – (финансовая стратегия), набор финансовых активов, которыми располагает инвестор. Объект ** , состоящий из последовательности случайных величин **, где каждое **интерпретируется как число единиц банковского счёта в момент времени n, и последовательности случайных векторов

*, ,…, ,*

где каждое  ** интерпретируется как число акций k-го типа в момент времени *n (,).*

Множество Парето – Множество состояний системы, оптимальных по Парето (оптимальность по Парето — такое состояние некоторой системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других). В экономике ситуация, когда достигнута эффективность по Парето — это ситуация, когда все выгоды от обмена сторон исчерпаны.

**Постановка задачи**

Найти оптимальный портфель для одношаговой модели (B,S)-рынка с помощью метода Лагранжа.

Входные данные: М, С, k, 

Где:

M – вектор математических ожиданий

C – ковариационная матрица

k –некоторый известный положительный коэффициент, отражающий предпочтения инвестора

δ ,η – границы заданного интервала, для построения множества Парето

X0  - начальный капитал

– стоимости активов в начальный момент времени

Выходные данные: множество Парето, и оптимальный портфель с учетом предпочтений инвестора.

**Описание модели и алгоритм решения задачи**

Рассмотрим одношаговую модель (B,S)- рынка. В распоряжении инвестора имеется N активов, в которые необходимо инвестировать начальный капитал X0. Нам известны стоимости активов в начальный момент времени ,,….,. Стоимости активов в финальный момент будем определять по следующей формуле: , i=1,…,N. (1)

В формуле (1) доходности ρi – совокупность случайных величин, относительно которых известны вектор математических ожиданий и ковариационная матрица ;  (2).

Для портфеля π=(γ1, γ2… γm) начальный и финальный капиталы будем вычислять по1формулам:  
. Тогда доходность портфеля будет определяться следующим образом: , где xi – доли начального капитала, приходящиеся на активы S(i), вычисляются по формуле . поэтому они удовлетворяют естественным ограничениям: . Доходность портфеля  является случайной величиной с математическим ожиданием  и дисперсией .

Согласно теории Марковица, при выборе портфеля следует стремиться к максимизации математического ожидания *m* и минимизации дисперсии *d*. Таким образом, мы получим оптимизационную задачу с двумя критериями.

Для составления оптимальной стратегии можно заменить векторный критерий на «подходящий» скалярный критерий. И тогда задачу выбора оптимального портфеля можно сформулировать следующим образом:

, при ограничениях . (3)

Обозначим  − решение задачи (3), тогда , оптимальный портфель .

Наиболее полным решением многокритериальной задачи является построение множества Парето (множества не улучшаемых стратегий) в пространстве критериев.

В качестве примера рассмотрим параметрическую задачу:  
  при ограничениях . (4)

Пусть  − решение задачи (4). Обозначим . Тогда множеством Парето будет являться график функции  на заданном интервале . В задаче (4) отсутствуют ограничения на знак. Допустим, что какое-то из оптимальных значений . Это означает, что  единиц  необходимо продать по цене  и вырученные средства добавить к начальному капиталу.

Для решения задачи (4) применим метод Лагранжа. В результате получим следующую систему уравнений:

 (5) .

У вектора  все компоненты равны единице. Предположим, что ковариационная матрица  положительно определена, кроме этого она симметрична. Находим из (5) . Обозначим  и подставим  во второе и третье уравнения системы (5). В результате относительно множителей Лагранжа  и  получим систему линейных уравнений:

 (6)

Определитель системы  в случае, когда . Будем считать, что это так. Система (6) имеет единственное решение .   
Тогда риск определяется следующим образом:



Зададим следующим уравнением предпочтения инвестора (зависимость риска от доходности) , где k – некоторый известный положительный коэффициент. Тогда получим следующее квадратное уравнение относительно параметра : . Решив данное уравнение, получаем, что . Необходимо выбрать положительное значение . Тогда можно определить ,,  и найти оптимальный портфель с учетом предпочтения инвестора.

**Полученные результаты**

Мы получили значения удельных весов активов портфеля, обеспечивающих желаемую доходность инвестора с минимальным риском или дисперсией портфеля. Для различных значений желаемой доходности мы будем получать соответствующее значение минимального риска

Наглядное представление данных можно увидеть на графике, отражающем эффективную границу портфеля.

**Тестовый пример**

Входные данные:

C=; M=;

δ = 1 ; η = 3; k = 6; X0 = 3;

= 1 ; = 2

Решение:

1. Для начальных входных данных рассматриваем параметрическую задачу. Согласно условиям полученной задачи строим систему уравнений по методу Лагранжа.

;  
I=[1,1];  
C=; M=

1. Решим систему линейных уравнений относительно множителей Лагранжа



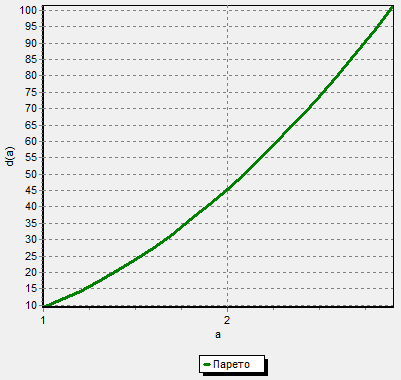
Обозначили:  
α=(A,I); β=(A,M); γ=(B,M)

3. Определим оптимальный портфель с учетом предпочтения инвестора

4. Покажем на графике зависимость риска от доходности

Результат:

Множество Парето:



Оптимальный портфель:



(Для получения результата был использован пакет прикладных программ Maple)

**Заключение**

В данной работе представлен один из методов решения проблемы нахождения оптимального портфеля для одношаговой модели (B,S)-рынка. Согласно теории Марковитца, при вычислении оптимальной стратегии инвестор стремится к минимизации риска и максимизации прибыли. В результате получается двухкритериальная задача. Данную задачу можно свести к однокритериальной задаче двумя способами. Один из способов - введение одного критерия, равного отношению величины прибыли к величине риска и его максимизации. В работе рассматривается второй способ, в котором фиксируется величина прибыли и минимизируется риск. В работе приводится решение оптимизационной задачи с помощью метода Лагранжа.

Таким образом, в результате выполнения работы с помощью входных данных мы построили множество Парето, и оптимальный портфель с учетом предпочтений инвестора, используя метод Лагранжа.

**Список литературы.**

1. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики /А.Н.Ширяев. – М.:ФАЗИС, 2004. – 1056 с.
2. Данилова, Н.В. Об одной модели (B,S)-рынка со случайным изменением коэффициента тренда/ Н.В.Данилова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – т.17, вып.5. – С. 609-619.
3. Данилова, Н.В. Параллельный алгоритм расчёта справедливой цены Европейского опциона / Н.В.Данилова, Б.Я.Штейнберг, Л.Н.Фоменко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2011. – №3(126). – С.115-125.
4. Красий Н.П., Павлов И.В. Модели -рынков типа Кокса-Росса-Рубинштейна в случае скупки акций // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естест. науки. 2001. №1. С. 7-11.
5. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
6. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и её применения. 1994. Т.39 №1. С.5-22.